Es. 1: Sia (x,y) una base di L. Allora $[L,L]$ è generato come sp. vett. da $[x,y]$, cioè $\dim([L,L]) \leq 1$ $(=1 \Leftrightarrow [x,y]\neq 0)$.

Segue: $[L,L]$ abeliano, quindi $L^{(2)}=\{0\}$.

Un esempio di alg. risolubile ma non nilpot. di dim. 2:

$$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0\end{pmatrix} \mid a,b\in k\right\}=L \qquad [L,L]=\operatorname{span}\underbrace{\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right]}_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}}=$$

$$=k\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$[L,[L,L]] \ni \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

e per induz. $L^m \ni \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$ $\forall m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Es. 2: Sia per assurdo $\dim(\operatorname{Rad}(L)) \geq \dim(L)-2$.

Allora $L/\operatorname{Rad}(L)$ ha dim. ≤ 2, da cui $L/\operatorname{Rad}(L)$ è risolubile: se ha dim. 1 è abeliana quindi risol., se ha dim. 2 è risolubile per l'es. 1.

Ma anche $\operatorname{Rad}(L)$ è risolubile, e seguirebbe L risolubile: assurdo.

Es. 3: L semisemplice $\Rightarrow \operatorname{Rad}(L)=\{0\}$, e si usa l'eserc. 2).

Es. 4: $\dim(sl(2)) = 3$ $gl(sl(2)) = gl(3)$.

Sia $\delta \in Der(L)$, $2\delta(e) = \delta([h,e]) = [\delta(h), e] + [h, \delta(e)] =$

$$\delta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$= [a_{12}e + a_{22}h + a_{32}f, e] +$

$+ [h, a_{11}e + a_{21}h + a_{31}f] =$

$= 2a_{22}e - a_{32}h + 2a_{11}e - 2a_{31}f$

$= 2a_{11}e + 2a_{21}h + 2a_{31}f$

Segue: $a_{31} = 0$, $2a_{21} = -a_{32}$, $a_{22} = 0$

Usando $h = [e,f]$ e $2f = [f,h]$ si ottiene

$$\delta = \begin{pmatrix} a_{11} & -2a_{23} & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ 0 & -2a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix} = a_{11}\, ad(h) + a_{23}\, ad(e) - a_{21}\, ad(f)$$

Es. 5: Supp. p. ass. $\dim([L,I]) = \dim(I)$, quindi $[L,I] = I$,

$[L,[L,I]] = [L,I] = I$, e per induz $\forall m$:

$\underbrace{[L,[L,\dots,[L}_{m},I]\dots]] = I$, che è cont. in L^{m-1},

assurdo.

Es. 6: 1) $N_{\mathfrak{gl}(n)}(\mathfrak{b}(n))$ ($\mathfrak{h}(n)$ opp.): basta usare matrici diagonali in $\mathfrak{b}(n)$:

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, A\right] = \begin{pmatrix} & 0 & \\ \boxed{\text{i-esima riga di } A} \\ & 0 & \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \boxed{\ } & 0 \end{pmatrix}$$

posto i

i-esima colonna di A

quindi se il risultato deve essere in $\mathfrak{b}(n)$ o $\mathfrak{h}(n)$ allora A era già in $\mathfrak{b}(n)$ rispett. $\mathfrak{h}(n)$.

2) $\mathfrak{b}^u(n) = [\mathfrak{b}(n), \mathfrak{b}(n)]$ è un ideale di $\mathfrak{b}(n)$ quindi $N_L(\mathfrak{b}^u(n)) \supseteq \mathfrak{b}(n)$.

Per l'altra inclusione, oss. che

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ 0 & 0 & \\ & & \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} a & b & \cdots \\ c & d & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix}}_{\in N_L(\mathfrak{b}^u(n))}\right] = \begin{pmatrix} c & \cdots \\ 0 & \cdots \\ \vdots & \\ 0 & \cdots \end{pmatrix}$$

quindi $c = 0$

e così si conclude che la matrice in $N_L(\mathfrak{b}^u(n))$ deve stare in $\mathfrak{b}(n)$.

Es. 7: L di dim. 3

1) $L = [L, L]$, $L = \operatorname{Span}\{x, y, z\}$

$[L, L]$ è gen. da $[x,y]$, $[x,z]$, $[y,z]$

quindi nessuno di questi è nullo, sono <u>lin. indip.</u>

Sia $I \neq \{0\}$ ideale, supp. $\dim(I) = 1$, e $I = \text{Span}\{x\}$ (poss. farlo a meno di cambiare base). Allora

$[x, y]$, $[x, z] \in I \Rightarrow$ sono lin. dip.: assurdo.

Supp. $\dim(I) = 2$, $I = \text{Span}\{x, y\}$. Allora

$[x, y]$, $[x, z]$, $[y, z] \in I \Rightarrow$ sono lin. dip.: assurdo.

Segue: $I = L$, cioè L è semplice.

2) $[L, L]$ ha dim. 2 $\Rightarrow$ $[L, L]$ è risolubile per l'eserc. 1.

es. $L = [L, L]$ ma L non semis.:

$$\begin{pmatrix} \boxed{\mathfrak{sl}(2)} & k^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Inoltre $\dfrac{L}{[L,L]}$ abeliana $\Rightarrow$ risol., e allora L è risolubile.

3) $$\left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & & \\ 0 & -a & & 0 \\ \hline & & a & c \\ & 0 & 0 & -a \end{array} \right) \right\} = L$$

oss.: $(\underbrace{\mathfrak{b}(2) \cap \mathfrak{sl}(2)}_{\text{dim. } 2})^{(1)} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dim. } 1}}{\mathfrak{n}(2)}$

Es. 8: Consid. $L \supseteq L^1 \supseteq L^2 \supseteq \ldots \supseteq L^m = \{0\}$

Vale $L \not\subseteq K$, mentre $\{0\} \subseteq K$.

Sia s l'ultimo indice per cui $L^s \not\subseteq K$, allora $L^{s+1} \subseteq K$.

D'altronde $[L, L^s] = L^{s+1} \subseteq K$, quindi $L^s + K \supsetneq K$ e

$$[L^s + K, K] = [L^s, K] + [K, K] \subseteq L^{s+1} + K = K.$$

Cioè $N_L(K) \supseteq L^s + K \supsetneq K$.

Es. 9: Sia $x \in L$, $y \in M$, abb.

$$[x, y] \in [L, L] \subseteq M$$

quindi M è un ideale.

Es. 10: $I^{(m)}$ per induzione: $m = 0$: ok

passo induttivo: Sia $x \in I^{(m)}$, allora x è comb. lin. di bracket del tipo $[y_i, z_i]$ con $y_i, z_i \in I^{(m-1)}$.

Sia $w \in L$:

$$[w, [y_i, z_i]] = [\underbrace{[w, y_i]}_{\in I^{(m-1)} \text{ per induz.}}, \underbrace{z_i}_{\in I^{(m-1)}}] + [\underbrace{y_i}_{\in I^{(m-1)}}, \underbrace{[w, z_i]}_{\in I^{(m-1)} \text{ per induz.}}] \in I^{(m)}$$

Segue: $[w, x] \in I^{(m)}$

L^{m}: analogo.